

KÜLÖNLENYOMAT
A NEHÉZIPARI MŰSZAKI EGYETEM MAGYAR NYELVŰ
KÖZLEMÉNYEI
XII. KÖTETÉBŐL

Dr. HUSZTHY LÁSZLÓ

**Csigák geometriai jellemzőinek áttekintése
vektorszámítás segítségével**

MISKOLC
1965

CSIGÁK GEOMETRIAI JELLEMZŐINEK ÁTTEKINTÉSE VEKTORSZÁMÍTÁS SEGÍTSÉGÉVEL

DR. HUSZTHY LÁSZLÓ

egyetemi adjunktus

Kézirat beérkezett 1963. augusztus 29-én

A csigahajtásoknál használt különféle csigák geometriai tulajdonságait úgy tudjuk legkönnyebben áttekinteni, ha először felírjuk a csigafelület egyenletét és ennek alapján vizsgáljuk a csiga nevezetes, jellemző metszeteit. A vizsgálatot megkönnyíti a vektorszámítás alkalmazása.

Számításainkat térbeli derékszögű koordináta-rendszerben végezzük (1. ábra.)

Adott a z -tengelyű, k sugarú *torokhenger*, a torokhengert érintő (A) alkotó xy -síkkal bezárt φ szöge.

Az alkotó forogjon a z -tengely körül állandó szögsebességgel és közben emelkedjék a z -tengely irányában ugyanesak állandó sebességgel úgy, hogy közben az xy -síkkal bezárt φ szöge állandó maradjon. A kiinduló helyzetben az alkotó haladjon át az x -tengely $(k; 0; 0)$ pontján és legyen párhuzamos az yz -síkkal.

Az alkotó és a torokhenger érintkezési pontja az alkotó mozgása közben csavargörbét ír le a torokhenger palástján. A csavargörbét leíró, origó kezdő-pontú helyvektor:

$$\vec{r}_g = \{k \cos \varphi; k \sin \varphi; r\varphi\}, \quad (1)$$

ahol az 1. ábra alapján φ az $\vec{r}_g$ vektor vetületének az x -tengellyel bezárt szöge

$$r = \frac{h}{2\pi}$$

pedig állandó, h a csavargörbe menetemelkedése.

Jelöljük az alkotó pillanatnyi irányába mutató egységvektort $\vec{a}$ -ral. Az $\vec{a}$ vektor összetevőinek felírását megkönnyíti a 2. ábra, amely a torokhenger egy részének xy -síkbeli vetületét mutatja, a torokhengert érintő (A) alkotó irányában álló $\vec{a}$ egységvektor vetületével együtt. E vetület hossza $\cos \varphi$, ennek alapján

$$\vec{a} = \{-\cos \varphi \cdot \sin \varphi; \cos \varphi \cdot \cos \varphi; \sin \varphi\}. \quad (2)$$

A mozgó (A) alkotó által leírt csavarfelület tetszőleges pontját az

$$\vec{r} = \vec{r}_g + \lambda \vec{a} \quad (3)$$

vektor jellemzi. λ valós paraméter és

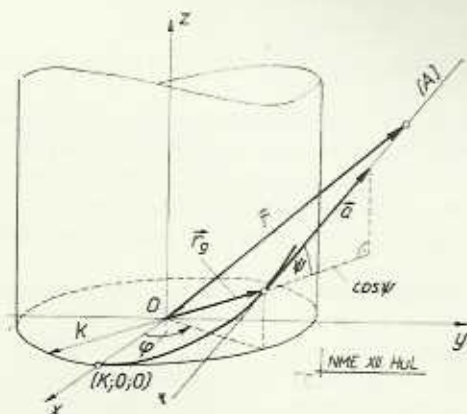
$$-\infty < \lambda < +\infty.$$

Ezzel a csavarfelület kétparaméteres egyenletrendszere (1), (2) és (3) figyelembevételével:

$$\vec{r} = \{k \cos \varphi; k \sin \varphi; r \varphi\} + \lambda \{-\cos \psi \cdot \sin \varphi; \cos \psi \cdot \cos \varphi; \sin \psi\},$$

rendezve:

$$\vec{r} = \{k \cos \varphi - \lambda \cos \psi \cdot \sin \varphi; k \sin \varphi + \lambda \cos \psi \cdot \cos \varphi; r \varphi + \lambda \sin \psi\}, \quad (4)$$



I. ábra

vagy paraméteres alakban, skaláris egyenletekre bontva:

$$\left. \begin{aligned} x &= k \cos \varphi - \lambda \cos \psi \cdot \sin \varphi \\ y &= k \sin \varphi + \lambda \cos \psi \cdot \cos \varphi \\ z &= r \varphi + \lambda \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ezután vizsgáljuk meg a (4) felület homlokmetsetét, hengermetsetét és tengelymetsetét.

a) Homlokmetset

A csigára legjellemzőbb metsetet, a homlokmetsetet az xy -síkban vizsgáljuk. Az (5) egyenletrendszer harmadik egyenletéből ekkor $z = 0$ helyettesítéssel

$$r \varphi + \lambda \sin \psi = 0,$$

$$\lambda = -\frac{r \varphi}{\sin \psi},$$

a λ -ra így kapott kifejezést behelyettesítve (5) első és második egyenletébe a homlokmetsetgörbe paraméteres egyenletrendszere:

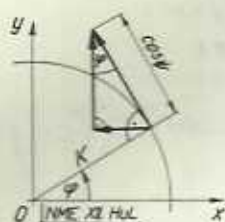
$$\left. \begin{aligned} x &= k \cos \varphi + \frac{r \varphi}{\sin \psi} \cos \psi \cdot \sin \varphi \\ y &= k \sin \varphi - \frac{r \varphi}{\sin \psi} \cos \psi \cos \varphi \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

vagy rövidebb alakban:

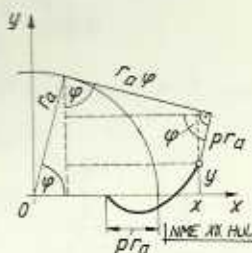
$$\left. \begin{aligned} x &= k \cos \varphi + r \operatorname{ctg} \psi \cdot \varphi \sin \varphi \\ y &= k \sin \varphi - r \operatorname{ctg} \psi \cdot \varphi \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Mivel r és ψ a csavarfelületre jellemző állandók, bevezetjük az

$$r \operatorname{ctg} \psi = r_a \quad (8)$$



2. ábra



3. ábra

jelölést ($r_a = \text{const.}$); bevezetjük továbbá a következő önkényes megállapodást:

$$k = c r_a, \quad (9)$$

ahol c egyelőre szabadon választható állandó. Ha c értékét változtatjuk, konvolut, archimedesi, ill. evolvens-csigához jutunk.

1. Ha $0 < c < 1$, azaz

$$0 < k < r_a,$$

akkor (7) alapján a homlokmetset egyenletrendszere

$$\left. \begin{aligned} x &= r_a (c \cos \varphi + \varphi \sin \varphi) \\ y &= r_a (c \sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

vagyis a homlokmetset *hurkolt evolvens* (konvolut csiga). A hurkolt evolvenst az r_a sugarú alapkörrel lefejtett fonál végpontjához egy, a fonálra merőleges, $pr_a = \text{const.}$ hosszúságú egyenesszakasz szabad végpontja írja le (3. ábra.) Egyenletrendszere a 3. ábra alapján:

$$\left. \begin{aligned} x &= r_a \cos \varphi + r_a \varphi \sin \varphi - pr_a \cos \varphi \\ y &= r_a \sin \varphi - r_a \varphi \cos \varphi - pr_a \sin \varphi \end{aligned} \right\},$$

összevonva:

$$\left. \begin{aligned} x &= r_a [(1-p) \cos \varphi + \varphi \sin \varphi] \\ y &= r_a [(1-p) \sin \varphi - \varphi \cos \varphi] \end{aligned} \right\}$$

Ebből $1-p=c$ jelöléssel éppen a (10) egyenletrendszer adódik. A torok-henger sugara:

$$k = cr_a = (1-p)r_a = r_a - pr_a,$$

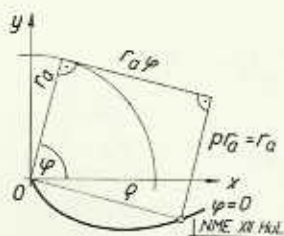
az evolvens alapkör sugarának és a lefejtett fonál végén, reá merőlegesen elhelyezkedő egyenesszakasz hosszának a különbsége.

2. Ha $c=0$, azaz $k=0$, akkor a (7) egyenletrendszer így alakul:

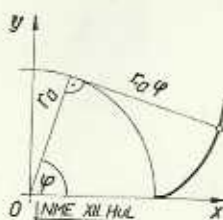
$$\left. \begin{aligned} x &= r_a \varphi \sin \varphi \\ y &= -r_a \varphi \cos \varphi \end{aligned} \right\},$$

mindkét egyenlet jobb- és baloldalát négyzetre emelve és az egyenleteket összeadva:

$$x^2 + y^2 = r_a^2 \varphi^2,$$



4. ábra



5. ábra

átterve poláris koordinátákra, $\varrho^2 = x^2 + y^2$ jelöléssel

$$\varrho = r_a \varphi \quad (11)$$

adódik. Ez archimedesi spirális egyenlete egy olyan poláris koordinátarendszerben, amelynek kezdőpontja az eredeti derékszögű koordinátarendszer origója, $\varphi=0$ tengelye pedig az x -tengellyel esik egybe. (11) az archimedesi csiga homlokmetasztete (4. ábra). Ez a $p=1$ esetnek felel meg.

3. Végül, ha $c=1$, azaz $k=r_a$, akkor a (7) egyenletrendszer új alakja:

$$\left. \begin{aligned} x &= r_a (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) \\ y &= r_a (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ez a közösleges (csúcsos) evolvens egyenlete (evolvenscsiga homlokmetasztete, 5. ábra.) Ebben az esetben $p=0$.

b) Hengermetszet

A hengermetszet akkor jön létre, ha a csavarfelületet a z -tengellyel koaxiális körhengerrel hozzuk metszésbe. Mészük el a csavarfelületet egy ilyen hengerrel, amelynek sugara s , ekkor a metszetgörbe tetszőleges pontjának

koordinátáira a következő összefüggések állnak fenn:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= s^2 = \text{const.} \\ z &= z(\varphi) \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Helyettesítsük be (13) első egyenletébe x és y (5) szerinti kifejezéseit:

$$(k \cos \varphi - \lambda \cos \psi \sin \varphi)^2 + (k \sin \varphi + \lambda \cos \psi \cos \varphi)^2 = s^2;$$

a műveletek elvégzése után

$$k^2 + \lambda^2 \cos^2 \psi = s^2,$$

ebből

$$\lambda = \sqrt{\frac{s^2 - k^2}{\cos^2 \psi}} = \frac{\sqrt{s^2 - k^2}}{\cos \psi}, \quad (14)$$

ezt helyettesítsük be (5) harmadik egyenletébe:

$$\begin{aligned} z &= r \varphi + \frac{\sqrt{s^2 - k^2}}{\cos \psi} \sin \psi \\ z &= r \varphi + \operatorname{tg} \psi \sqrt{s^2 - k^2} = z(\varphi). \end{aligned} \quad (15)$$

A hengermetszet egyenlete tehát általában:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= s^2 = \text{const.} \\ z &= r \varphi + \operatorname{tg} \psi \sqrt{s^2 - k^2} \end{aligned} \right\}; \quad (16)$$

$$(s \geq k).$$

Ez csavarvonal egyenlete; részletesebben:

$$\left. \begin{aligned} x &= s \cos \varphi \\ y &= s \sin \varphi \\ z &= r \varphi + \operatorname{tg} \psi \sqrt{s^2 - k^2} \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

vagy vektor alakban:

$$\vec{r}_h = \{s \cos \varphi; s \sin \varphi; r \varphi + \operatorname{tg} \psi \sqrt{s^2 - k^2}\}. \quad (18)$$

Ebből az alakból kiindulva könnyen vizsgálható a hengermetszetenél adódó csavarvonal emelkedési szöge különböző s értékek esetén.

A hengermetszet csavargörbéjének érintő irányvektora ui. (18) φ szerinti differenciálásával:

$$\frac{d\vec{r}_h}{d\varphi} = \dot{\vec{r}}_h = \{-s \sin \varphi; s \cos \varphi; r\};$$

kiszámítjuk a csavargörbe érintője és a z -tengely által bezárt β szög koszinuszát (ez a szög a csavargörbe γ_s emelkedési szögének pótszöge).

Az $\dot{\vec{r}}_h$ érintővektornak és a z -tengely $\vec{k}$ egységvektorának skaláris szorzata:

$$\dot{\vec{r}}_h \vec{k} = |\dot{\vec{r}}_h| |\vec{k}| \cos \beta,$$

innen

$$\cos \beta = \frac{\vec{r}_h \cdot \vec{k}}{|\vec{r}_h| |\vec{k}|} = \frac{\{-s \sin \varphi; s \cos \varphi; r\} \cdot \{0; 0; 1\}}{\sqrt{s^2 \sin^2 \varphi + s^2 \cos^2 \varphi + r^2} \cdot 1} = \frac{r}{\sqrt{s^2 + r^2}}.$$

Az emelkedési szögre nézve

$$\cos \beta = \sin \gamma_s = \frac{r}{\sqrt{s^2 + r^2}}$$

és

$$\operatorname{tg} \gamma_s = \frac{\sin \gamma_s}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma_s}} = \frac{\frac{r}{\sqrt{s^2 + r^2}}}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{s^2 + r^2}}} = \frac{r}{s};$$

$$\operatorname{tg} \gamma_s = \frac{r}{s}. \quad (19)$$

Adott r esetén tehát a menetemelkedés a metszőhenger s sugarának növekedésével csökken.

Ha a metszőhenger éppen az alaphenger ($s = r_a$), akkor

$$\operatorname{tg} \gamma_a = \frac{r}{r_a},$$

és (8) felhasználásával

$$\operatorname{tg} \gamma_a = \frac{r}{r \operatorname{ctg} \psi} = \operatorname{tg} \psi, \text{ vagyis}$$

$$\gamma_a = \psi.$$

c) Tengelymetszet

Messük el a csavarfelületet az xz -síkkal párhuzamos, $y = s$ egyenletű síkkal (6. ábra). Ekkor (5) második egyenlete:

$$k \sin \varphi + \lambda \cos \psi \cdot \cos \varphi = s, \text{ ebből}$$

$$\lambda = \frac{s - k \sin \varphi}{\cos \psi \cdot \cos \varphi},$$

ezt helyettesítve (5) első és harmadik egyenletébe, a tengelymetszet paraméteres egyenletrendszere:

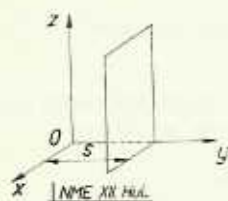
$$\left. \begin{aligned} x &= k \cos \varphi - \frac{s - k \sin \varphi}{\cos \psi \cdot \cos \varphi} \cos \psi \cdot \sin \varphi \\ z &= r \varphi + \frac{s - k \sin \varphi}{\cos \psi \cdot \cos \varphi} \sin \psi \end{aligned} \right\}.$$

A lehetséges összevonásokat elvégezve:

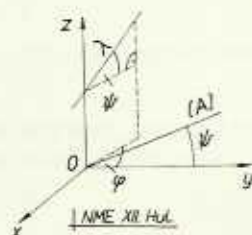
$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{k - s \sin \varphi}{\cos \varphi} \\ z &= \operatorname{tg} \psi \left(r_a \varphi + \frac{s - k \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Ha a tengelymetszet síkja átmegy a csiga tengelyén (a z -tengelyen), azaz $s = 0$, akkor a tengelymetszet egyenletrendszere:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{k}{\cos \varphi} \\ z &= \operatorname{tg} \psi (r_a \varphi - k \operatorname{tg} \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$



6. ábra



7. ábra

Ez az általános alak, amidőn

$$\left. \begin{aligned} 0 &< c < 1 \\ 0 &< k < r_a \end{aligned} \right\}$$

Evolvenscsigánál $k = r_a$, tehát a tengelymetszet:

$$x = \frac{r_a}{\cos \varphi}$$

$$z = \operatorname{tg} \psi (r_a \varphi - r_a \operatorname{tg} \varphi) = r_a \operatorname{tg} \psi (\varphi - \operatorname{tg} \varphi),$$

ill. $\operatorname{tg} \varphi - \varphi = \operatorname{inv} \varphi$ felhasználásával:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{r_a}{\cos \varphi} \\ z &= -r_a \operatorname{tg} \psi \cdot \operatorname{inv} \varphi \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Archimedesi csigánál $k = 0$, ekkor a csigafelület (5) egyenlete így alakul:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\lambda \cos \psi \cdot \sin \varphi \\ y &= \lambda \cos \psi \cdot \cos \varphi \\ z &= r \varphi + \lambda \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Ez olyan csavarfelület egyenlete, amely egy kezdőhelyzetben az origón átmenő, yz -síkhban fekvő, az xy -síkkal φ szöget bezáró alkotó egyenes z -tengely körüli forgatásával és a z -tengely menti emelésével keletkezik (7. ábra).

Az ábrából láthatjuk, hogy φ most a forgó egyenes xy -síkbeli vetületének az y -tengellyel bezárt szögét jelenti; ha a felület yz -síkbeli tengelymetszetét vizsgáljuk, akkor

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 0 \\ \sin \varphi &= 0 \\ \cos \varphi &= 1 \end{aligned} \right\}. \quad (25)$$

(24) első egyenletéből $x = 0$ helyettesítéssel az következik, hogy mivel $\cos \varphi \neq 0$, λ tetszőleges, így a tengelymetszet egyenletrendszere (25) felhasználásával:

$$\left. \begin{aligned} y &= \lambda \cos \varphi \\ z &= \lambda \sin \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (26)$$

A tengelymetszet tehát csak ebben az esetben egyenes.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ШНЕКОВ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРНОГО РАСЧЕТА

Д-р Л. ХУСТИ

Резюме

Исследование геометрических параметров шнеков можно произвести легко проверяемым способом с использованием элементов векторного расчета, исходя из уравнения винтовой поверхности. Вывод уравнения торцевого сечения, сечения вала и сечения цилиндра, требующий хорошего пространственного представления, производится простыми формальными ступенями.

ERMITTELUNG DER GEOMETRISCHEN KENNWERTE VON SPIRALEN DURCH VEKTORRECHNUNG

DR. L. HUSZTHY

Zusammenfassung

Die geometrischen Kennwerte der Spiralen können — ausgehend von der Schraubenflächengleichung — im Wege der Vektorrechnung in leicht übersichtlicher Weise ermittelt werden. Die eine gute räumliche Sicht erfordernde Ableitung der Vorderschnitt-, Achsenschnitt- und Zylinderschnittgleichung erfolgt in einfachen formalen Stufen.

SURVEY OF THE GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF WORMS, WITH THE HELP OF VECTOR COMPUTATION

DR. L. HUSZTHY

Summary

The investigation of the geometric characteristics of the worms, starting from the equation of the screw surface, can be carried out in an easily surveyable manner with the use of the elements of vector calculation. Derivation of the equation of front section, axial section and cylinder section demanding proper stereoscopic contemplation, is effected in simple, formal steps.

VUE D'ENSEMBLE SUR LES CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES
DES VIS SANS FIN, À L'AIDE DU CALCUL VECTORIEL

DR. L. HUSZTHY

Résumé

En partant de l'équation de la surface spirale, les caractéristiques géométriques des vis sans fin peuvent être examinées d'une manière très claire, en appliquant les éléments du calcul vectoriel. La déduction — exigeant une bonne vue spatiale — des équations de la coupe frontale, de la coupe axial et de la coupe cylindrique, peut être exécuté d'une manière simple, par des pas formels.