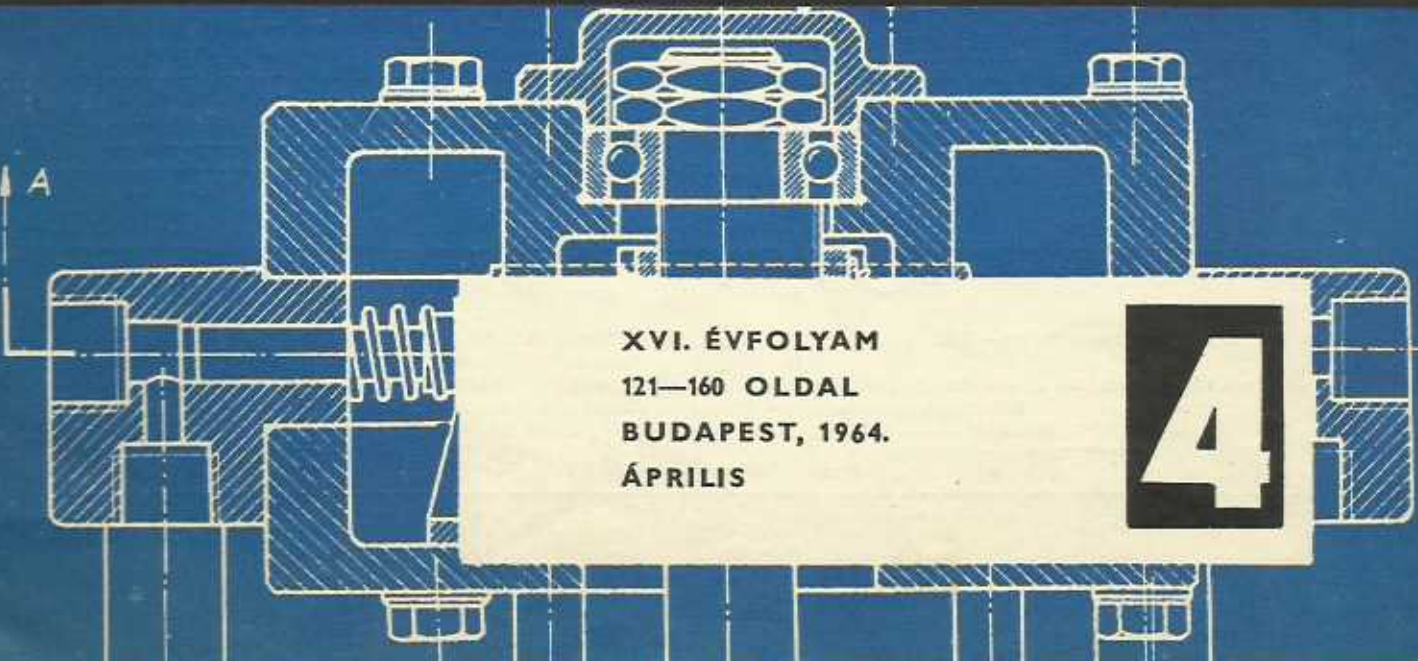


A large technical drawing of a gear mechanism, shown in a semi-circular cross-section. The drawing is rendered in white lines on a dark blue background. It features a central gear with a spring mechanism, surrounded by other gears and shafts. The drawing is highly detailed, showing the teeth of the gears and the internal components.

GÉP

A GÉPIPARI TUDOMÁNYOS EGYESÜLET MŰSZAKI FOLYÓIRATA

A technical drawing of a mechanical assembly, shown in a cross-section. The drawing is rendered in white lines on a dark blue background. It features a central component with a spring mechanism, surrounded by other parts. The drawing is highly detailed, showing the internal components and the assembly structure. An arrow labeled 'A' points upwards on the left side of the drawing.

XVI. ÉVFOLYAM
121—160 OLDAL
BUDAPEST, 1964.
ÁPRILIS

4

Bütykös vezérlés sebesség- és gyorsulásviszonyainak analitikus vizsgálata

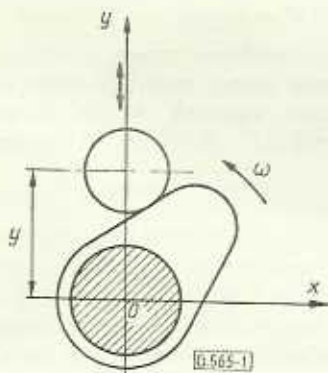
DR. HUSZTHY LÁSZLÓ*

adjunktus

A vezérlőbütyök kontúrgörbéjének ismeretében a mozgattat elem út — idő, sebesség — idő és gyorsulás — idő grafikonja szerkesztéssel megoldható. Tekintettel arra, hogy e grafikonok szerkesztése grafikus differenciálást kíván, az érintőszerkesztés nehézsége miatt a sebességre és a gyorsulásra kapott görbék nem pontosak, használható görbék készítése nagy gondosságot igényel. Ez a cikk matematikai módszerekkel oldja meg az út — idő, sebesség — idő és gyorsulás — idő függvények meghatározását, ezekből a függvényekből a sebesség, ill. a gyorsulás értékei tetszőleges pontossággal kiszámíthatók.

A számítás kirútelezése komplex számokkal, ill. az ezeket szemléltető síkvektorokkal történik.

Az 1. ábra alapján a vezérlő bütyök forogjon az origó körül az xy síkban állandó ω szögsebességgel pozitív értelemben. A bütyök által mozgattatott görgő haladó mozgása legyen az y tengelyre korlátozva. Feladatunk a görgő középpontjának mozgástörvényét leíró $y = y(t)$ függvény meghatározása (t időt jelent), továbbá ennek ismeretében a



1. ábra

$$v(t) = y'(t) \text{ sebesség}$$

$$a(t) = y''(t) \text{ gyorsulás}$$

felírása, végül az utóbbi kettő maximumának kiszámítása.

A bütyök kontúráját — valamilyen megállapodás alapján felvett kezdőhelyzetben — az

$$\begin{cases} x_0 = x_0(\lambda) \\ y_0 = y_0(\lambda) \end{cases} \quad (1)$$

egyenletrendszer írja le. Itt a λ paraméter valamilyen geometriai mennyiséget (szöveget, távolságot stb.) jelent. Az (1) paraméteres egyenletrendszert helyettesíthetjük egyetlen komplex számmal, melynek szemléletes képe síkvektor: (2.) ábra)

* Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc.

$$z_0(\lambda) = x_0(\lambda) + j \cdot y_0(\lambda) \quad (2)$$

j a képzetes egység ($j^2 = -1$).

Az origó körül ω szögsebességgel forgó görbe pontjait leíró z síkvektor úgy keletkezik, hogy a z_0 síkvektort megszorozzuk egy olyan z_f síkvektorral, amelynek abszolút értéke egységnyi, az x tengellyel bezárt szöge pedig a t idővel arányos ωt szög. A z_f forgatóvektor:

$$z_f(t) = \cos \omega t + j \cdot \sin \omega t \quad (3)$$

Ezzel a forgó görbe egyenlete:

$$\begin{aligned} z &= z_0(\lambda) \cdot z_f(t) = \\ &= [x_0(\lambda) + j \cdot y_0(\lambda)] [\cos \omega t + j \cdot \sin \omega t] \end{aligned} \quad (4)$$

$$z = (x_0 \cos \omega t - y_0 \sin \omega t) + j(x_0 \sin \omega t + y_0 \cos \omega t)$$

A forgó z vektor két változó: λ és t függvénye. Ha $t = t_1$ rögzített érték, akkor a $z(\lambda; t_1)$ síkvektor végpontja a t_1 időpontban álló helyzetű görbe pontjain halad végig, ha viszont $\lambda = \lambda_1$ rögzített érték, akkor a $z(\lambda_1; t)$ síkvektor végpontja azon a görbén mozog, amelyet a kiindulásul választott helyzetben λ_1 paraméterű görbepont az időbeli mozgása közben leír.

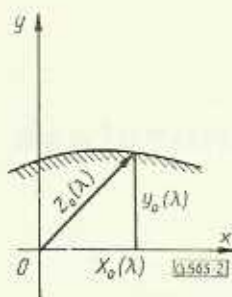
A bütyök és a görgő érintkezésének egy tetszőleges pillanatában (3. ábra):

$$k = z + n \quad (5)$$

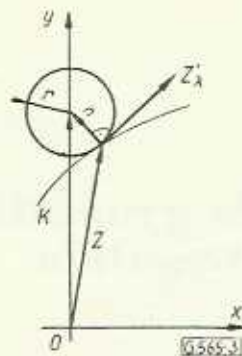
n a görbe és a bütyök érintkezési pontjához tartozó, a bütyök kontúrgörbéjére merőleges, r hosszúságú normálvektor.

Az érintővektort a (4) vektor λ szerinti deriválásával kapjuk:

$$z'_\lambda = (x'_0 \cos \omega t - y'_0 \sin \omega t) + j(x'_0 \sin \omega t + y'_0 \cos \omega t) \quad (6)$$



2. ábra



3. ábra

Ennek abszolút értéke:

$$|z'_\lambda| = \sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}$$

Az érintő egységvektor:

$$\frac{z'_\lambda}{|z'_\lambda|} = \frac{1}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}} [(x_0' \cos \omega t - y_0' \sin \omega t) + j(x_0' \sin \omega t + y_0' \cos \omega t)] \quad (7)$$

Ezt az érintő egységvektort j -vel szorozva egy reál merőleges normális egységvektort kapunk (pozitív értelmű forgatással), végül ennek hosszát a görgő r sugarával szorozva:

$$\begin{aligned} n &= j \frac{z'_\lambda}{|z'_\lambda|} \cdot r = \\ &= \frac{r}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}} [(-x_0' \sin \omega t - y_0' \cos \omega t) + \\ &\quad + j(x_0' \cos \omega t - y_0' \sin \omega t)] \quad (8) \end{aligned}$$

Megjegyzés: konkrét számításhoz figyelembe kell venni azt, hogy a z érintővektor a növekvő λ paraméternek megfelelő irányba mutat, így a paraméter választásától függően vagy j -vel, vagy $(-j)$ -vel való szorzás által kapjuk a helyes irányítású normálvektort.

(4)-et és (8)-at behelyettesítve (5)-be:

$$\begin{aligned} k &= z + j \frac{z'_\lambda}{|z'_\lambda|} r = \\ &= [x_0 \cos \omega t - y_0 \sin \omega t + \\ &\quad + \frac{r}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}} (-x_0' \sin \omega t - y_0' \cos \omega t)] + \\ &\quad + j [x_0 \sin \omega t + y_0 \cos \omega t + \\ &\quad + \frac{r}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}} (x_0' \cos \omega t - y_0' \sin \omega t)] \quad (9) \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy a k vektor az y tengely irányába essék, az szükséges, hogy k valós része 0 legyen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(k) &= x_0 \cos \omega t - y_0 \sin \omega t + \\ &+ \frac{r}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}} (-x_0' \sin \omega t - y_0' \cos \omega t) = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

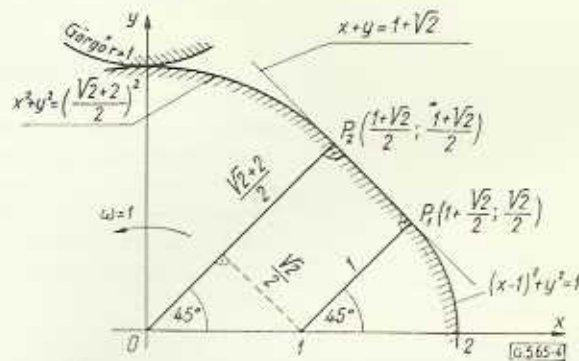
A (10) egyenlet baloldala λ és t függvénye. Ebből az egyenletből meghatározzuk λ -t, mint a t idő függvényét:

$$\lambda = \lambda(t) \quad (11)$$

Ez az összefüggés azt mutatja meg, hogy az adott t időpontban a bütők melyik (kiinduló állapotbeli) λ paraméterű pontja érintkezik a görgővel. A (11) függvényt behelyettesítve (9) képzetes részébe, kapjuk a keresett $y(t)$ függvényt. Ennek t szerinti első, ill. második deriváltja adja a görgő haladó mozgásának sebességét, ill. gyorsulását.

Példa:

A 1. ábra szerint a bütők kontúrja kezdőhelyzetben álljon az



1. ábra

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left(\frac{\sqrt{2} + 2}{2} \right)^2 && \text{körívrből,} \\ \text{az } x + y &= 1 + \sqrt{2} && \text{egyenesből és} \\ \text{az } (x-1)^2 + y^2 &= 1 && \text{körívrből} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Egyszerű számítással meggyőződhetünk arról, hogy az egyenes érinti mindkét kört, az érintési ponthoz tartozó sugarak 45° -os szöget zárnak be az x -tengellyel. A működő egyenesszakasz hossza $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Az érintési pontok koordinátái is könnyen ellenőrizhetők az ábra alapján.

A görgő sugara legyen $r = 1$ és a szögsebesség, amellyel a bütők forog az origó körül, $\omega = 1/\text{sec}$.

Az origó középpontú körívszakasznak nincs befolyása a görgő y tengelymenti haladó mozgására, csak az egyenesszakasz és az eltoló középpontú körívszakasz hatását vizsgáljuk.

a) Egyenes egyenlete az 5. ábra alapján:

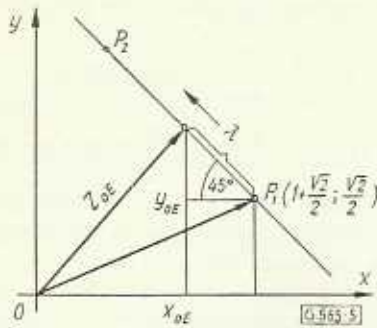
$$\begin{cases} x_{0E} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_{0E} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (13)$$

ill. komplex alakban:

$$z_{0E} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \right) + j \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \right) \quad (14)$$

Itt λ az egyenes futópontjának a P_1 ponttól mért távolságát jelenti; λ balra felfelé növekszik pozitív értelemben. Amíg a z_{0E} vektor végpontja befutja a $P_1 P_2$ szakaszt, a paraméter változása:

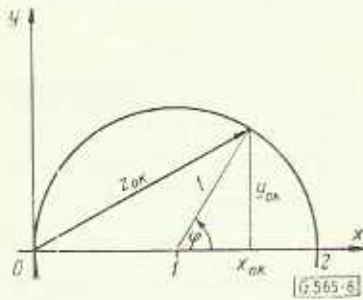
$$0 \leq \lambda \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (15)$$



5. ábra

b) Kör egyenlete a 6. ábra alapján:

$$\begin{cases} x_{0K} = 1 + \cos \varphi \\ y_{0K} = \sin \varphi \end{cases} \quad (16)$$



6. ábra

iii. komplex alakban:

$$z_{0K} = (1 + \cos \varphi) + j \cdot \sin \varphi \quad (17)$$

Miközben a félbütyök köríves részén a z_{0K} síkvektor végpontja végigfut, a paraméter változása:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}; \quad (18)$$

a φ paraméter az óramutató járásával ellentétes értelemben növekvő.

Már itt megjegyezzük, hogy a z'_2 , ill. z'_φ deriváltak a paraméternek így felvett változása esetén olyan irányítású érintővektorokat adnak, amelyeket a $-j$ vektorral való szorzással, tehát az óramutató járásával egyező értelmű forgatással lehet a helyes irányítású normális irányba átvinni.

Ezután határozzuk meg az $y(t)$ függvényt előbb az egyenes, azután a köríves szakasz működése esetére, mindkét esetben csak a félbütyökre szorítkozva.

a) Egyenesszakasz működik

(14) és (3) szorzata ($\omega = 1$ figyelembevételével):

$$\begin{aligned} z &= z_{0E} \cdot z_f = \\ &= \left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \right) \cos t - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \right) \sin t \right] + \\ &+ j \left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \right) \sin t + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \right) \cos t \right]$$

Az érintővektor (egybeesik az egyenessel):

$$\begin{aligned} z'_2 &= \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \right] + \\ &+ j \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \right], \end{aligned}$$

ennek abszolút értéke:

$$|z'_2| = 1.$$

A normális vektor ($r = 1$ -gyel szorozva):

$$\begin{aligned} n &= -j \cdot z'_2 = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \right] + \\ &+ j \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \right] \end{aligned}$$

Az (5) szerinti k vektor:

$$\begin{aligned} k &= z + n = \left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \right) \cos t - \right. \\ &- \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \right) \sin t - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \left. \right] + \\ &+ j \left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \right) \sin t + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \right) \cos t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \right]. \end{aligned}$$

Ennek valós részét nullával tesszük egyenlővé:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \right) \cos t - \\ &- \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda \right) \sin t - \\ &- \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t = 0. \end{aligned}$$

Ebből

$$\lambda = \frac{(\sqrt{2} + 2) \cos t - 2 \sin t}{\sin t + \cos t} \quad (19)$$

ezt behelyettesítve k képzetes részébe:

$$\begin{aligned} y_E(t) &= \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \left[\sqrt{2} + 1 - \frac{(\sqrt{2} + 2) \cos t - 2 \sin t}{\sin t + \cos t} \right] \sin t + \right. \\ &+ \left[1 + \frac{(\sqrt{2} + 2) \cos t - 2 \sin t}{\sin t + \cos t} \right] \cos t + \\ &+ \cos t + \sin t \left. \right\} \end{aligned}$$

Több lépésben végzett rendezés után:

$$y_E(t) = \frac{\sqrt{2} + 4}{2} \cdot \frac{1}{\sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right)} \quad (20)$$

Ez tehát a görgő középpontjának mozgástörvénye, miközben a görgő a büttyök egyenes szakaszán gördül.

Természetesen ez a mozgástörvény csak korlátozott időtartamra érvényes. A 4. ábrából látható, hogy a görgő nem mozdul el az y tengely mentén mindaddig, amíg a büttyök a kezdőhelyzetből pozitív értelemben $\frac{\pi}{4}$ -el el nem fordul. Ebben a

pillanatban a büttyök egyenes szakaszának $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ paraméterű pontja lép érintkezésbe a görgővel. Mivel a szögsebesség egységnyi, ezért az elfordulás szögének radiánban vett mérőszáma egyúttal a kezdőállapottól eltelt időt is jelenti másodpercben.

A görgő függőleges mozgásának kezdeti időpontja tehát

$$t_{\text{kezdő}} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785 \text{ sec.}$$

A pozitív forgásirányt megtartva keressük azt az időpontot, amikor az egyenesszakasz utolsó, $\lambda = 0$ paraméterű pontja érintkezik a görgővel. A (19) egyenlet ekkor:

$$0 = \frac{(\sqrt{2} + 2) \cos t - 2 \sin t}{\sin t + \cos t},$$

azaz

$$(\sqrt{2} + 2) \cos t = 2 \sin t,$$

ebből

$$t = \arctg \frac{\sqrt{2} + 2}{2} \approx \arctg 1,7 \approx 1,04 \text{ sec.}$$

(ez megfelel a büttyök kb. 60° -os elfordulásának).

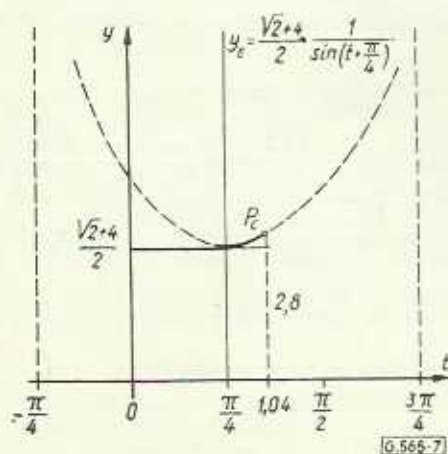
Az egyenesszakasz működése tehát a

$$\frac{\pi}{4} \leq t \leq \arctg \frac{\sqrt{2} + 2}{2},$$

azaz

$$0,785 \text{ sec} \leq t \leq 1,04 \text{ sec.}$$

d. intervallumban történik. Ennek megfelelően az $y_E(t)$ függvényt a 7. ábra mutatja.



7. ábra

A görbe ordinátája a $t = 1,04$ helyen

$$(tg t = \frac{\sqrt{2} + 2}{2} \text{ felhasználásával}):$$

$$y_E(1,04) = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \approx 2,8 \text{ egység.}$$

Ehhez a ponthoz kell majd csatlakoznia a köríves szakaszra vonatkozó $y_K(t)$ görbének.

b) *Köríves szakasz működik*

(17) és (3) összeszorozásával

$$z = z_{\varphi K} \cdot z_f = [(1 + \cos \varphi) \cos t - \sin \varphi \sin t] + j[(1 + \cos \varphi) \sin t + \sin \varphi \cos t].$$

Az érintővektor:

$$z'_\varphi = [-\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \sin t] + j[-\sin \varphi \sin t + \cos \varphi \cos t].$$

Ennek abszolút értéke:

$$|z'| = 1.$$

Ezzel az $r = 1$ hosszúságú normálvektor:

$$n = -j z'_\varphi = [-\sin \varphi \sin t + \cos \varphi \cos t] + j[\sin \varphi \cos t + \cos \varphi \sin t].$$

Az (5) szerinti k vektor:

$$\begin{aligned} K &= z + n = \\ &= [(1 + \cos \varphi) \cos t - \sin \varphi \sin t - \sin \varphi \sin t + \\ &\quad + \cos \varphi \cos t] + j[(1 + \cos \varphi) \sin t + \sin \varphi \cos t + \\ &\quad + \sin \varphi \cos t + \cos \varphi \sin t] = \\ &= [\cos t + 2 \cos(\varphi + t)] + j[\sin t + 2 \sin(\varphi + t)] \end{aligned}$$

A reális részt nullává téve:

$$\cos t + 2 \cos(\varphi + t) = 0$$

$$\cos(\varphi + t) = -\frac{1}{2} \cos t \quad (21)$$

Ebből nem szükséges φ explicit kifejezését megkeresni, mert (21) ebben az alakjában is felhasználható a k képzetes részébe való behelyettesítésre:

$$\begin{aligned} \text{Im}(k) &= \sin t + 2 \sin(\varphi + t) = \\ &= \sin t + 2 \sqrt{1 - \cos^2(\varphi + t)}; \\ y_K(t) &= \sin t + 2 \sqrt{1 - \frac{1}{4} \cos^2 t}; \\ y_K(t) &= \sin t + \sqrt{4 - \cos^2 t}. \end{aligned} \quad (22)$$

A köríves büttyökrész kapcsolási időtartamát vizsgálva helyettesítsük be először a $\varphi = \frac{\pi}{4}$ paraméterértéket (21)-be:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = -\frac{1}{2} \cos t,$$

ebből rendezéssel:

$$t = \arctg \frac{\sqrt{2} + 2}{2},$$

amint várható is volt, ez az egyenesszakasz kapcsolódásának befejezéséhez tartozó időpont,

$\varphi = 0$ helyettesítéssel pedig

$$\cos t = -\frac{1}{2} \cos t$$

adódik, ami akkor állhat fenn, ha $t = \frac{\pi}{2}$.

A köríves bütökörész kapcsolódási időtartama tehát

$$\arctg \frac{\sqrt{2} + 2}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

A köríves bütökörész kapcsolódásának kezdetén az y ordináta ellenőrzésként kiszámítható az

$$y_K(t) = \sin t + 2 \sin(\varphi + t)$$

egyenletből $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}$ helyettesítéssel

$$y_K(t) = \sin t + 2(\sin \varphi \cos t + \cos \varphi \sin t) = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} + 2 \left(\sin \varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} + \cos \varphi \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} \right)$$

ebből rendezés után

$$y_K \left(\arctg \frac{\sqrt{2} + 2}{2} \right) = \sqrt{2\sqrt{2} + 5}$$

ugyanannyi, mint az egyenesszakasz kapcsolódásának befejező időpontjában. A (20) és (22) egyenlettel adott görbék tehát, értelmezési tartományukat is figyelembe véve a

$$P_c \left(\arctg \frac{\sqrt{2} + 2}{2}; \sqrt{2\sqrt{2} + 5} \right)$$

pontban csatlakoznak egymáshoz.

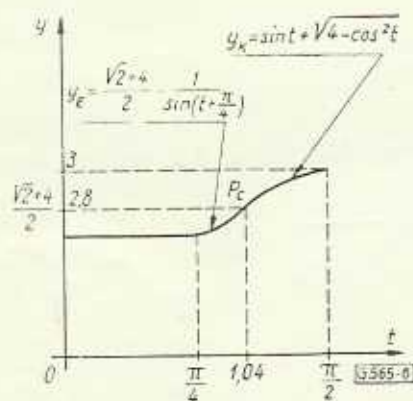
Ellenőrzésként kiszámítjuk az ordinátát a $t = \frac{\pi}{2}$

helyen:

$$y_K \left(\frac{\pi}{2} \right) = \sin \frac{\pi}{2} + \sqrt{4 - \cos^2 \frac{\pi}{2}} = 1 + 2 = 3,$$

ami a bütök forgástengelytől legtávolabb levő pontjának és a bütök sugarának értékét tekintve helyes eredmény.

Az a) és b) alatt tárgyalt esetekre vonatkozó mozgástörvények grafikonja közös ábrába rajzolva látható a 8. ábrán.



8. ábra

Sebességek számítása

a) Az egyenesszakasz működése alatt

$$v_E = \frac{dy_E}{dt} = -\frac{\sqrt{2} + 4}{2} \cdot \frac{\cos \left(t + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin^2 \left(t + \frac{\pi}{4} \right)} \quad (23)$$

b) A köríves rész működése alatt

$$v_K = \frac{dy_K}{dt} = \cos t + \frac{\cos t \sin t}{\sqrt{4 - \cos^2 t}} \quad (24)$$

Ha a (23) és (24) képletekbe behelyettesítjük a

$$t = \arctg \frac{\sqrt{2} + 2}{2} \sim \text{kb. } 60^\circ$$

értéket (az egyenes és a köríves rész csatlakozási pontjának megfelelő idő értékét), akkor mindkét esetben

$$v_E = v_K = 0,74 \text{ hosszegység/sec.}$$

adódik. Az $y = y_E(t)$ és $y = y_K(t)$ görbék tehát közös érintővel csatlakoznak egymáshoz.

Gyorsulások számítása

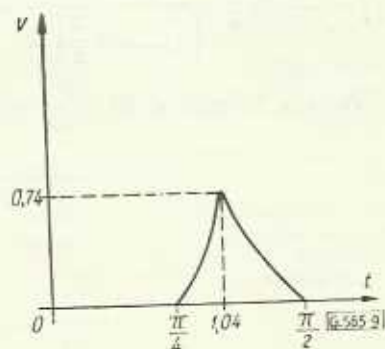
a) Az egyenesszakasz működése alatt:

$$a_E = \frac{dv_E}{dt} = \frac{\sqrt{2} + 4}{2} \cdot \frac{\sin^2 \left(t + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos^2 \left(t + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin^3 \left(t + \frac{\pi}{4} \right)} \quad (25)$$

b) A köríves rész működése alatt:

$$a_K = \frac{dv_K}{dt} = -\sin t - \frac{\cos^4 t - 4 \cos 2t}{(4 - \cos^2 t)^{3/2}} \quad (26)$$

A $v(t)$ görbe megrajzolásához felhasználjuk a gyorsulásokat is. A (25)-ből látszik, hogy az egyenesszakasz működése alatt a gyorsulás mindig pozitív, a sebességgörbe tehát emelkedő jellegű, míg a köríves szakasz működése alatt a gyorsulás mindig negatív, a sebességgörbe megfelelő ága tehát süllyedő. Ezek szerint legnagyobb a sebesség az egyenes és a körív csatlakozási pontjának a görögével való érintkezése pillanatában. A sebesség maximális értéke:



9. ábra

$$v_{\max} = v_E \left(\arctg \frac{\sqrt{2} + 2}{2} \right) =$$

$$= v_k \left(\arctg \frac{\sqrt{2} + 2}{2} \right) \approx 0,74 \text{ hosszegység/sec.}$$

A $v(t)$ görbe jellegét a 9. ábra mutatja.

$$\frac{da_E}{dt} = \frac{\sqrt{2} + 4}{2} \cdot \frac{2 \cos \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \sin^2 \left(t + \frac{\pi}{4} \right) + 3 \cos \left[t + \frac{\pi}{4} \right] \left[1 + \cos^2 \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \right]}{\sin^4 \left(t + \frac{\pi}{4} \right)}$$

Tekintettel arra, hogy az egyenesszakasz kapcsolódása közben

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{4} \leq t \leq 1,04 \\ \cos \left(t + \frac{\pi}{4} \right) < 0 \end{array} \right\}$$

ezért a gyorsulás deriváltja az egész intervallumban pozitív, a gyorsulásgörbe tehát emelkedő jellegű. A gyorsulás deriváltját nullával téve egyenlővé:

$$\cos \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \left[2 \sin^2 \left(t + \frac{\pi}{4} \right) + \right.$$

$$\left. + 3 + 3 \cos^2 \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \right] = 0;$$

ez csak $\cos \left(t + \frac{\pi}{4} \right) = 0$, vagyis $t = \frac{\pi}{4}$ esetében

állhat fenn, a szögletes zárójelben levő tényező nem lehet 0. Eszerint a gyorsulásgörbének ebben

a szakaszban $t = \frac{\pi}{4}$ -nél van a t tengellyel párhuzamos érintője, ordinátája itt

$$a_E \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2} + 4}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} + 2 \cos^2 \frac{\pi}{2}}{\sin^3 \frac{\pi}{2}} =$$

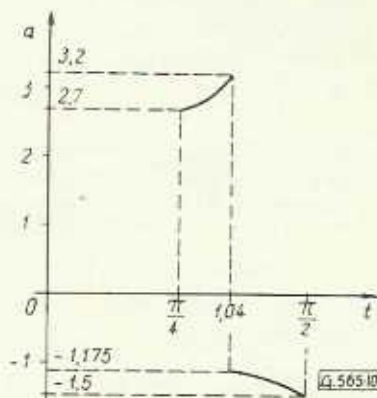
$$= \frac{\sqrt{2} + 4}{2} \approx 2,7 \text{ (hosszegység)}^2/\text{sec}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k \left(\arctg \frac{\sqrt{2} + 2}{2} \right) \approx a_k (60^\circ) = -\sin 60^\circ - \frac{\cos^4 60^\circ - 4 \cos 120^\circ}{(4 - \cos 60^\circ)^{3/2}} \approx -1,175 \text{ (hosszegység)}^2/\text{sec} \\ a_k \left(\frac{\pi}{2} \right) = -\sin \frac{\pi}{2} \frac{\cos^4 \frac{\pi}{2} - 4 \cos \pi}{(4 - \cos \frac{\pi}{2})^{3/2}} = -1,5 \text{ hosszegység}^2/\text{sec.} \end{array} \right.$$

A gyorsulásgörbe jellegét a 10. ábra mutatja. Maximális gyorsulásként a 3,2 értéket fogadjuk el.

A gyorsulásgörbe felrajzolásához vizsgáljuk a gyorsulások deriváltját.

A (25)-ből látható, hogy az egyenesszakasz működése alatt a gyorsulás mindig pozitív. Deriváltja:



10. ábra

az egyenes és a köríves szakasz csatlakozásának helyén pedig a gyorsulás értéke:

$$a_E \left(\arctg \frac{\sqrt{2} + 2}{2} \right) \approx a_E (60^\circ) = \frac{\sqrt{2} + 4}{2} \cdot$$

$$\frac{\sin^2 105^\circ + 2 \cos^2 105^\circ}{\sin^3 105^\circ} \approx 3,2 \text{ (hosszegység)}^2/\text{sec.}$$

A köríves szakasz működése alatt a gyorsulások nyilvánvalóan kisebbek, mint az előző szakaszban. Itt már csak a köríves szakasz működésének kezdeti és befejező időpontjához tartozó gyorsulásokat számítjuk ki: