

MISKOLCI EGYETEM



GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

## SZÍJÁGAK TRANSZVERZÁLIS LENGÉSEI

Ph.D értekezés tézisei

KÉSZÍTETTE:

**Kollányi Tibor**

okleveles gépészmérnök

SÁLYI ISTVÁN GÉPÉSZETI TUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA,  
GÉPEK ÉS SZERKEZETEK TERVEZÉSE TÉMATERÜLET,  
SZERSZÁMGÉPEK TERVEZÉSE TÉMACSOPORT

DOKTORI ISKOLA VEZETŐ:

**Dr. Páczelt István**

Az MTA rendes tagja

TÉMAVEZETŐ:

**Dr. habil. Patkó Gyula**

egyetemi tanár

Miskolc, 2003

## 1. BEVEZETÉS, IRODALMI ELŐZMÉNYEK

A gépészmérnöki gyakorlatban az egymástól távol elhelyezkedő tengelyek közötti nyomaték- és teljesítményátvitel céljából elterjedten alkalmaznak szíjhajtásokat. Széleskörű alkalmazása – autóipar, könnyűipar számos ágazata, általános- és szerszámgépipar, stb... – az olcsó kivitelezhetőségével, a csendes üzemével, könnyű szerelhetőségével, kedvező rezgéscsillapítási tulajdonságaival és nem utolsósorban jó hatásfokával magyarázható (v.ö. pl.: [14, 22, 24, 34]). A szíjhajtások tervezésének elmélete régóta ismert és alkalmazott technika a mérnöki gyakorlatban (v.ö. [25, 27, 28, 34]). Napjainkban a neves szíjgyártók a grafikus módon, diagramok alapján történő szíjméretezést (kiválasztást) támogatják (v.ö.: [7, 8, 16]). Ezen méretező és kiválasztó eljárások alapját szilárdságtani számítások képezik.

Nagy pontosságot igénylő alkalmazáskor – mint például szerszámgépek fő- és mellékajtóművei – azonban nem elegendő az egyes gépelemek, adott esetben a szíjak kizárólag szilárdságtani méretezése. Ilyen esetekben már a hajtás tervezésekor fontos azon lengéstani ismeretek alkalmazása, melyek lehetővé teszik a dinamikai problémák tervezési fázisban való megoldását, elkerülését. Szerszámgépek tervezésekor a dinamika és azon belül a lengéstan alkalmazásának szükségességét több szerző hangsúlyozza, pl. TOBIAS [26], WECK [29] és DRESIG [4]. Napjainkra az egyre nagyobb vágósebességet igénylő és lehetővé tevő korszerű szerszámanyagok, tovább erősítik ezen szemlélet alkalmazására vonatkozó törekvést. Itt gondolunk a korszerű eszterga-, maró- és köszörűgépek egyes típusainak jóval  $10000 \frac{1}{min}$  feletti fordulatszámra járatott főorsóira és a még nagyobb fordulatszámra járatott gyorsmegmunkálás (*High Speed Cutting*, HSC) technológia gépeire. Ezen korszerű ma már egyre inkább terjedő szerszámgépek többsége ma is legalább egy szíjhajtás tartalmaz.

Szíjhajtások tervezésekor alapvetően kétféle dinamikai feladatot kell megoldanunk. Az egyik feladat, a szíjágak hosszirányú, longitudinális lengéseiből eredő a hajtás egészének szempontjából azonban torziós lengéseként jelentkező problémakör vizsgálata. A másik feladat pedig a szíjágak transzverzális lengéseinek vizsgálata. Irodalmi és üzemeltetési tapasztalatok alapján ismeretes, hogy a szíjágak bizonyos futási sebességeknél elveszítik stabilitásukat és azokon transzverzális lengések alakulnak ki. Ezen lengések károsan befolyásolják a szíj és esetenként a gép élettartamát, illetve – például szerszámgépek esetén – a megmunkálási folyamatra, gyártási pontosságra is nemkívánatos hatást gyakorolhatnak. Célszerű és fontos tehát azon instabil tartományok tervezési fázisban történő meghatározása, melyekben a fent említett nem kívánatos lengések kialakulhatnak. Ugyancsak hasznos lehet a stabilitásvesztést követően kialakuló lengések amplitúdóinak ismerete is.

A fenti dinamikai jelenségek vizsgálatára az irodalomban többféle modell alakult ki, az egyszerűnek mondható lineáristól haladva a jóval bonyolultabb és összetettebb feladatot jelentő nemlineáris modellekig. A szíj mint egy alapvetően nem fémes, összetett szerkezeti elem esetenként nagy alakváltozásokat szenved, melyek szabatos vizsgálata megköveteli a nemlineáris tagok figyelembevételét. Ismert ugyanis, hogy a lineáris modellek csak kis alakváltozások esetére adnak megfelelően pontos eredményt és érvényüket veszítik a nagyobb alakváltozások és nagyobb amplitúdójú lengések esetén.

Az 1950-es évek közepétől találkozhatunk olyan írásokkal, melyek szíjak lengéseivel foglalkoznak. Az első mai szemmel nézve is igényes leírás P. MATTHIEU-tól [15] származik. Cikkében azonos átmérőjű szíjtárcsákon állandó sebességgel futó szíj transzverzális lengéseinek mozgásegyenletét írja fel és a megoldások jellegét vizsgálja különböző szíjsebességek esetén. Lineáris modellt alkalmazva kimutatta a kritikus szíjsebesség létezését. Gyorsjárású fogazottszíjak stabilitási tulajdonságait vizsgálta BELYAEV és HIRMANN [10]-ben. A fogazott szíj speciális kialakítását állandó keresztmetszetű szíjra felírt lineáris mozgásegyenletben külső gerjesztésként vették figyelembe. A fő instabilitási tartományt a szíjfesztítő erő és a szíjsebesség koordinátarendszerében határozták meg. Hasonló számításokat végeztek láncok esetére is [2].

Szíjhajtású szerszámgép főhajtóművek nemlineáris lengéseit vizsgálta FARAGÓ [5], [6]. A szíjágak mozgásegyenlet rendszerét a HAMILTON elv segítségével írta fel, majd a KRÜLLOV-BOGOLJUBOV féle aszimptotikus módszerrel határozta meg a kialakuló lengések amplitúdóit. Szerszámgépek főhajtását vizsgálta PATKÓ és FARAGÓ [20, 21]. A [19] tézisfüzetben azonos átmérőjű szíjtárcsákat tartalmazó szíjhajtások esetére, melyek közül az egyik szíjtárcsán az excentricitás elhanyagolható, PATKÓ meghatározta a szíjágak transzverzális lengéseinek stabilitási tartományainak első közelítését, továbbá a *Fázisgörbe feletti linearizálás módszerére* (vö.: [18]) támaszkodva előállította a stabilitásvesztés után kialakuló lengések amplitúdóinak első közelítését. Négyütemű Otto-motor fogazott vezérműszíjának lengéseit numerikus módszerekkel és kísérleti úton vizsgálták a [1, 23] értekezések, melyek FARAGÓ [5] eredményeit is felhasználják. Nemlineáris modellt vizsgálva állította elő a szíjágak lengéseinek amplitúdóját ZU és ZHANG [31]-ben. A cikkben a *Multiple Scale Method* eljárást alkalmazva határoztak meg határciklusokat, majd ezek stabilitását a ROUTH-HURWITZ stabilitási kritérium alapján vizsgálták a [32]-ben. Numerikus módszerekkel határozták meg a rugalmas szíjfesztítő tárcsával ellátott hajtás sajátfrekvenciáit és amplitúdóit [30]-ben. Ezen vizsgálatokat a [33] cikkben a *Multiple Scale Method* eljárásra támaszkodva analitikus formában ismelték meg.

Megállapítható továbbá, hogy a vizsgálatok során a szerzők általában a periodikusan változó (váltakozó) előfeszítő erőből származtatják a paraméteres gerjesztést. Kevés kivételtől eltekintve ezen feltételezések során csupán egy harmonikust vesznek figyelembe. Itt jegyezzük meg, hogy a [6, 19] munkák utalnak a több harmonikusból álló paraméteres gerjesztő függvényre, azonban a számítások során csak az első tagot veszik figyelembe. LIN és PARKER [17] dolgozatukban a paraméteres gerjesztést  $n$  darab  $\Omega_i$ ,  $i = 1 \dots n$  körfrekvenciájú periodikus függvénnyel közelítik, nem utalnak azonban az egyes körfrekvenciák közötti kapcsolatra.

Mint a felsorolt irodalmakból kitűnik a szíjak dinamikai vizsgálata különös tekintettel a szíjágak transzverzális lengésire az alkalmazott dinamikai kutatások előterében van mind az autóipar mind a szerszámgépipar területén. Összefoglalva megállapítható, hogy a szíjágak transzverzális lengéseinek elméleti vizsgálata jelenleg két irányban folyik. Az egyik irányvonalat az instabil tartományok meghatározása jelöli ki. Ezen területen a differenciálegyenletek stabilitásvizsgálatából ismert egyes módszerek mint pl. FLOQUET elmélet, ROUTH-HURWITZ stabilitási kritérium alkalmazására támaszkodtak a szerzők. Célserűnke látszik a gépészmérnöki szemmel esetenként nehézkesen

alkalmazható elméletek helyett egyszerűbb, a mérnöki gondolkodásmódhoz jobban illeszkedő és könnyebben kezelhető stabilitásvizsgálati eljárást alkalmazni (v.ö.: [11–13]). Ilyen módszer lehet például a HILL determinánsok módszere (v.ö. pl.: [9]).

A kutatások másik irányát az instabil tartomány(ok)ban kialakuló lengések amplitúdóinak meghatározása jelenti. Az irodalom egységesnek mutatkozik abból a szempontból, hogy a szíjakak nemlineáris parciális differenciálegyenletét az esetek túlnyomó többségben GALERKIN módszere szerint lengésképenként diszkretizálják. Az így kapott nemlineáris közönséges differenciálegyenlet megoldását általában valamilyen analitikus módszerrel pl. a *Multiple Scale Method*, perturbációszámítás, GREEN függvény, illetve az aszimptotikus módszerek felhasználásával közelítik. Megfigyelhető, hogy a cikkek túlnyomó többségében a lengések első harmonikusait határozzák meg a szerzők. Ismeretes azonban, hogy számos fentebb felsorolt módszer első közelítése egy linearizálással egyenértékű eredményre vezet. Ezen linearizálási módszerek előnyeként említhető azok viszonylagos egyszerűsége és szemléletessége.

## 2. AZ ÉRTEKEZÉS CÉLKITŰZÉSE

Az előzőekben bemutatott irodalom hiányosnak tekinthető abból a szempontból, hogy legtöbbször nem általános szíjhajtást tekintenek kiinduló pontként, hanem az esetek döntő többségében  $i = 1$  áttételt tételeznek fel a modellalkotás folyamatában. Ez adódhat abból, hogy esetenként konkrét ipari feladatot kell gyorsan megoldani és csak azzal a speciális modellel foglalkoznak a szerzők. Ez a paraméteres gerjesztő függvény alakjában és a vizsgálat további módszereiben jelent könnyebbséget. Az  $i \neq 1$  esetben azonban a lengéseket leíró differenciálegyenletben két különböző körfrekvenciájú paraméteres gerjesztés jelenik meg. Ezen lengések vizsgálati módszerei ugyan hasonlóak lehetnek az egyszerűbb esetben alkalmazottakkal, azonban a kapott eredmények tekintetében minőségi változást jelentenek. Ebben az esetben új instabil tartományok jelennek meg, melyek vizsgálatát célul tűzzük ki.

Szintén hiányosnak nevezhetjük a vonatkozó irodalmat akkor, amikor azt a kérdést tesszük fel: mit kell megváltoztatnunk, hogy elkerüljük a transzverzális lengéseket?. A fellelhető cikkek szinte kivétel nélkül a szíjfeszítést tekintik változtatható paraméternek.

A szíjhajtások jellemzője az üzem közben állandóan jelen lévő szlip. Az irodalomban nem találtunk utalást arra vonatkozólag, van-e és ha igen akkor milyen hatása van a szlip jelenségének a kialakuló transzverzális lengések tartományaira.

Jelen értekezés az irodalom ezen hiányosságait igyekszik pótolni illetve a már ismert törvényszerűségeket kiegészíteni. Az egy excentricitást tartalmazó azonos átmérőjű szíjtárcsákkal megvalósított hajtás példáján keresztül az értekezés bemutatja az egyes paraméterek hatását a stabil-instabil tartományok határgörbéire. Részletesebben foglalkozik a szíjtárcsa excentricitása, a szíj hossza, a keresztmetszet nagysága, az előfeszítés nagysága, a szíj hajlítási merevsége mint paraméter az instabilitási tartományokra gyakorolt hatásaival. A dolgozat bemutatja az áttételt megvalósító, két excentrikus tárcsával modellezett hajtás szíjágainak mozgásegyenleteit, majd a HILL féle determinánsok módszerére támaszkodva előállítja az instabilitási tartományok első közelítéseinek egyenleteit. Az értekezés bemutatja, hogy ekkor két jelentős méretű ún. főinstabilitási tartomány alakul ki, amelyeket határoló görbék egyenletei mind a bevezetett paraméterek mind pedig a hajtás konstrukciós paramétereinek függvényeként

ismertetésre kerülnek. A mechanikai modellt tovább fejlesztve figyelembe vesszük a szíj csúszását (szlip) is. Ily módon ugyancsak meghatározzuk az instabilitási tartományok helyzetét. A *fázisgörbe feletti linearizálás módszerével* – mint szemléletes mérnöki módszerrel – meghatározzuk a stabilitásvesztés után kialakuló periodikus transzverzális lengések amplitúdóinak első közelítését. A kapott eredményeket numerikus módszerekre támaszkodva kívánjuk ellenőrizni.

### 3. A VIZSGÁLATOK MÓDSZEREI

Az értékezés elméleti módszereket alkalmaz a kítűzött feladatok megoldására. A vizsgálatok során elsősorban a mechanika nemlineáris lengéstanban alkalmazott módszerei, valamint a matematika differenciálegyenletek stabilitásvizsgálatával foglalkozó módszerei kapnak szerepet. Egyetlen szíjág transzverzális lengéseit leíró mozgásegyenlet egyensúlyi helyzetének stabilitásvizsgálatánál az értekezés a HILL féle determinánsokat alkalmazza ([3]). A stabilitásvesztés után kialakuló lengések amplitúdóinak számítására a fázisgörbe feletti linearizálás módszerére támaszkodik ([18, 19]).

### 4. ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK

- T.1. Egyetlen szíjág általános mozgását leíró differenciálegyenletrendszerből [19] kiindulva meghatároztam a két excentricitást tartalmazó szíjhajtás szíjágainak transzverzális lengések vizsgálatára alkalmas mozgásegyenletét. Az excentricitásnak a transzverzális lengések instabil tartományaira vonatkozó hatását vizsgálva megállapítottam, hogy amennyiben csak az egyik szíjtárcsán van jelentős excentricitás, vagy mindkettőn jelentős excentricitás van, de a szíjtárcsák átmérői megegyeznek akkor a transzverzális lengéseknek egy fő instabilitási tartománya van.
- T.2. Megmutattam, hogy amennyiben az excentricitást egyik szíjtárcsán sem elhanyagolható mértékű, akkor a kialakuló transzverzális lengéseknek két fő instabilitási tartománya van.
- T.3. A fenti fő instabilitási tartományok első közelítését a HILL determinánsok felhasználásával mind a csillapított mind a csillapítatlan lengések esetén általános esetre zárt alakban előállítottam.
- T.4. Megvizsgáltam, hogy hogyan befolyásolják az instabil tartományok helyzetét és nagyságát a transzverzális lengések során kialakuló lengésképek. Megállapítottam, hogy a magasabb lengésképekhez tartozó tartományok kiszélesednek és a magasabb fordulatszámok irányába tolódnak el. A gép működése szempontjából ezek az instabil tartományok veszélyesek lehetnek.
- T.5. Az excentricitás változásának hatását vizsgálva zárt alakú formulát adtam meg arra vonatkozóan, hogy az excentricitás mértéke hogyan befolyásolja az instabil tartományok helyzetét és nagyságát.
- T.6. Elemeztem az excentricitások közötti fáziseltérés hatását. Megmutattam, hogy a fáziseltérés milyen módon befolyásolja az instabil tartományok nagyságát.
- T.7. Megvizsgáltam a stabilitásvesztés után kialakuló lengések amplitúdóit. A lengések amplitúdó-frekvencia függvényeit a fázisgörbe feletti linearizálás módszerére támaszkodva állítottam elő. Az analitikus módszerrel kapott eredményeket numerikusan ellenőriztem.

- T.8. Elemeztem, hogy a szlip hatásának figyelembevétele milyen módon befolyásolja a stabilitási tartományokra kapott korábbi eredményeket, és megállapítottam, hogy a szlip hatására az instabil tartományok kis mértékben a magasabb fordulatszámok irányába mozdulnak el.
- T.9. Megvizsgáltam és meghatároztam az instabilitási tartományok magasabbfokú közelítéseit. A vizsgálatokat mind az egy mind pedig a két excentricitást tartalmazó hajtás esetére elvégeztem. Numerikus eljárást mutattam be a stabil-instabil tartományokat határoló görbék előállítására.

## 5. PUBLIKÁCIÓK AZ ÉRTEKEZÉS TÉMÁJÁBÓL

### • TUDOMÁNYOS DOLGOZATOK

- P.1. **Faragó Károly, Patkó Gyula, KOLLÁNYI TIBOR.** *Results of Stability Investigations on the Main Drives of Machine Tools.* GÉP, L(4-5):84-86, 1998.
- P.2. **Faragó Károly, Patkó Gyula, KOLLÁNYI TIBOR.** *Die Wirkung der Dämpfung der transversalen Schwingungen, die in Riemenantrieben auftreten, auf ihre Stabilitätsbereiche.* GÉP, L(8):23-26, 1998.
- P.3. **Faragó Károly, Patkó Gyula, KOLLÁNYI TIBOR.** *Szerszámgépek szíjhajtásainak nemlineáris paraméteresen gerjesztett lengései.* GÉP, L(11):14-16, 1998.
- P.4. **KOLLÁNYI TIBOR.** *Szíjhajtás stabilitási diagramjainak meghatározása magasabb fokú közelítésekkel.* Doktoranduszok fóruma, Gépészmérnöki Kar Szekciókiadványa, Miskolc, 37-40. oldal, 1998.
- P.5. **Faragó Károly, Patkó Gyula, KOLLÁNYI TIBOR.** *Die Untersuchung von Torsionschwingungen bei den Riemenantrieben mit der Methode der Linearisierung über Phasenkurve.* GÉP, L(5):35-39, 1999.
- P.6. **Patkó Gyula, KOLLÁNYI TIBOR.** *Non-linear Parametrically Excited Vibrations in Belt Drives of Machine Tools.* In Proceedings of Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms Vol.4, Oulu, Finland, pages 1619-1624, 1999.
- P.7. **KOLLÁNYI TIBOR.** *A kettős excentricitás hatása a szíjágak transzverzális lengéseire.* Doktoranduszok fóruma, Gépészmérnöki Kar Szekciókiadványa, Miskolc, XXX-XXX. oldal, 2000.
- P.8. **KOLLÁNYI TIBOR.** *Stability investigation of belt drives in case of large eccentricity of both pulleys.* In Proceedings of 11th World Congress in Mechanism and Machine Science, Tianjin, China, 2003.(közlésre elfogadva)
- P.9. **KOLLÁNYI TIBOR, Patkó Gyula, Faragó Károly.** *Szíjhajtások stabilitási tartományainak elhelyezkedése különböző lengésképek esetén.* GÉP, L(5):35-39, 2003.

### • ELŐADÁSOK

- E.1. **Patkó Gyula, Faragó Károly, KOLLÁNYI TIBOR.** *Szíjágak paraméteresen gerjesztett lengéseinek stabilitási tartományai.* VIII. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolci Egyetem, Miskolc, 1999. augusztus 30.-szeptember 1.

- E.2. **Patkó Gyula, KOLLÁNYI TIBOR, Faragó Károly.** *Effect of dumping and transmisson on stability of belt drives.* MicroCAD 2001 International Scientific Conference, Miskolc, Miskolci-Egyetem, 1-2 March 2001.
- E.3. **KOLLÁNYI TIBOR.** *A kettős excentricitás hatása a szíjhajtások stabilitására.* Géptervezők és Termékfejlesztők XVII. Országos Szemináriuma, Miskolc, 2001. november 8-9.
- E.4. **Gyula Patkó, TIBOR KOLLÁNYI, Károly Faragó.** *Stability of transversal vibrations of belts induced by belt joints.* An euro conference on numerical methods and computational mechanics, University of Miskolc, Miskolc, Hungary, July 15-19, 2002.
- E.5. **Patkó Gyula, KOLLÁNYI TIBOR, Faragó Károly.** *A szerszámgépdinamikai kutatások legújabb eredményei a Miskolci Egyetemen.* Géptervezők és Termékfejlesztők XVIII. Országos Szemináriuma, Miskolc, 2002. november 7-8.
- E.6. **Patkó Gyula, KOLLÁNYI TIBOR, Faragó Károly.** *Szíjágak nemlineáris lengései kettős excentricitás okozta stabilitásvesztés után.* IX. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolci Egyetem, Miskolc, 2003. augusztus 27-29.
- E.7. **KOLLÁNYI TIBOR, Patkó Gyula, Faragó Károly.** *Szíjhajtások stabilitási tartományainak elhelyezkedése különböző lengésképek esetén.* A Szerszámgépek Tanszéke 40 éves jubileuma alkalmából rendezett szimpózium, Miskolc, Miskolci Egyetem Továbbképző Központ, 2003. október 17.
- E.8. **Patkó Gyula, KOLLÁNYI TIBOR, Faragó Károly.** *A szlíp hatása a szíjágak transzverzális lengéseinek stabilitására.* Géptervezők és Termékfejlesztők XIX. Országos Szemináriuma, Miskolc, 2003. november 13-14.
- E.9. **KOLLÁNYI TIBOR.** *Szíjhajtások dinamikai vizsgálata,* MTA MTO Gépszerkezettani Bizottság, Mechanizmusok Albizottság, Budapest, 2003. november 21.

## 6. AZ EREDMÉNYEK HASZNOSÍTÁSÁNAK LEHETŐSÉGEI

Az értekezés zárt alakú formulát mutat be az áttételt tartalmazó szíjhajtások instabilitási tartományainak meghatározására. Ezen tartományok a hajtó oldali szíjtárcsa szögsebességére vannak kifejezve és paraméterként tartalmazzák a hajtás geometriai-, anyag-, és hajtástechnikai jellemzőit. Ily módon a tervező mérnök számára lehetővé teszi a tervezési fázisban történő ellenőrzést. Az analitikus formában bemutatott első közelítések alkalmasak a gyakorlatban felmerülő pontossági igények kielégítésére, míg a magasabbfokú közelítéseknél bemutatott numerikus módszer lehetőséget nyújt a pontosabb számítások elvégzésére is.

## HIVATKOZÁSOK

- [1] M. Arnold. *Einfluß unterschiedlichen Riemenspannerkonzepte auf dynamische Belastungen und Schwingungen von Zahnriemenantrieben in 4-Takt-Ottomotoren.* Dissertation, TU-Aachen, 1993.
- [2] A. Belyaev and R. Egsleer. Instabilitätsbereiche eines Kettentriebs. *Antriebstechnik*, (11):61–63, 1997.
- [3] W. W. Bolotin. *Kinetische Stabilität elastischer Systeme.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1961.
- [4] H. Dresig. *Schwingungen mechanischer Antriebssysteme.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2001.

- [5] K. Faragó. Nichtlineare Transversalschwingungen des Riemenantriebs von Werkzeugmaschinen - Hauptspindeln. *Maschinenmarkt*, (58):1158–1160, 1978.
- [6] K. Faragó. *Szűjhajtással kombinált szerszámgép főhajtóművek nemlineáris rezgései*. Kandidátusi értekezés, Miskolci Egyetem, 1986.
- [7] Gates Company. <http://www.gates.com/europe>.
- [8] Habasit AG. <http://www.habasit.hu/>.
- [9] G. W. Hill. On the part of the lunar perigee wich is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta Mathematica*, (8):1–36, 1886.
- [10] G. Hirmann and K. Belyaev. Stabilitätsverhalten eines schnellaufenden Synchronriemens. *Antriebstechnik*, (6):64–66, 1997.
- [11] T. Insperger. *Stability analysis of periodic delay-differential equations modeling machine tools chatter*. Ph. d. értekezés, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2002.
- [12] T. Insperger and G. Stépán. Semi-discretization method for delayed systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(5):503, 2002.
- [13] T. Insperger and G. Stépán. Stability of the damped mathieu equation with time delay. *Journal of Dynamics System, Measurement & Controll*, 125(2):166, 2003.
- [14] I. Knoll. *Szűj-, lánc- köté- és dörzshajtások*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.
- [15] P. Matthieu. Schwingungen von bewegten Saiten(Treibriemen). *VDI-Berichte*, (48):71–75, 1961.
- [16] Optibelt GmbH. <http://www.optibelt.com/>.
- [17] R. G. Parker and Y. Lin. Parametric instability of axially moving media subjected to multifrequency tension and speed fluctuations. *Journal of Applied Mechanics*, 68:49–57, 2001.
- [18] Gy. Patkó. *Közelítő módszer nemlineáris rezgések vizsgálatára*. Kandidátusi értekezés, Miskolci Egyetem, 1984.
- [19] Gy. Patkó. *Dinamikai eredmények és alkalmazások a géptervezésben*. A Miskolci Egyetem Habilitációs Füzetei, Miskolci Egyetem, 1998.
- [20] Gy. Patkó and K. Faragó. Parametrically Excited Vibrations in the Machine Tools. In *Proceedings of the Eleventh International Conference on Non-Linear Oscillations, Budapest*, pages 641–644, 1987.
- [21] Gy. Patkó and K. Faragó. Szerszámgépek főhajtásaiban fellépő nemlineáris rezgésekről. *Gép, Különszám*, pages 37–38, 1993.
- [22] Á. G. Pattantyús. *A gépek üzemtana*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1950.
- [23] J. Reinicke-Murmann. *Dynamische Beanspruchungsgrößen für Zahnriemenantriebe in 4-Takt-Verbrennungsmotoren*. Dissertation, TH-Aachen, 1993.
- [24] J. Tajnafői. *Szerszámgéptervezés I., II.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.
- [25] Z. Terplán. *Gépelemek II/2*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
- [26] S. A. Tobias. *Schwingungen an Werkzeugmaschinen*. Carl Hanser Verlag, München, 1961.
- [27] T. Ungár and A. Vida. *Segédlet a gépelemek I-II. kötetéhez*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
- [28] I. Vörös. *Gépelemek II*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
- [29] M. Weck and K. Teipel. *Dynamisches Verhalten spannender Werkzeugmaschinen*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.
- [30] L. Zhang and J. W. Zu. Modal analysis of serpentine belt drive systems. *Journal of Sound and Vibration*, 222(2):259–279, 1999.
- [31] L. Zhang and J. W. Zu. Nonlinear vibration of parametrically excited moving belts, part I: Dynamic response. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 66(2):396, 1999.
- [32] L. Zhang and J. W. Zu. Nonlinear vibration of parametrically excited viscoelastic moving belts, part II: Stability analysis. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 66(2):403, 1999.
- [33] L. Zhang and J. W. Zu. One-to-one auto-parametric resonance in serpentine belt drive systems. *Journal of Sound and Vibration*, 232(4):783, 2000.
- [34] Á. Zsáry. *Gépelemek II*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.